

Q. (基礎問題精講 1A 演習 97(2)(3))

解説を見てもよくわかりません。

A.

問題文より、

$$n \leq x < n + 1 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

が成立しますが、 $[x]$ の定義は $x$ を超えない最大の整数ですので、

$$[x] = n$$

となります。この値を、解くべき方程式

$$x^2 + 18 = 9[x] \cdots \cdots \textcircled{1}$$

に代入すると、

$$x^2 + 18 = 9n$$

$$x^2 = 9n - 18 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$x = \sqrt{9n - 18} = 3\sqrt{n - 2} \cdots \cdots (\text{答})$$

となります。ここで、 $\textcircled{2}$ を辺ごとに二乗すると

$$n^2 \leq x^2 < (n + 1)^2$$

ですので、ここに $\textcircled{3}$ を代入すると

$$n^2 \leq 9n - 18 < (n + 1)^2 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

となります。あとは連立不等式 $\textcircled{4}$ を解けば $n$ のとりうる値の範囲が得られます。

$\textcircled{4}$ の左2辺より

$$n^2 \leq 9n - 18$$

$$n^2 - 9n + 18 \leq 0$$

$$(n - 3)(n - 6) \leq 0$$

$$\therefore 3 \leq n \leq 6 \cdots \cdots \textcircled{5}$$

となります。また、 $\textcircled{4}$ の右2辺より

$$9n - 18 < (n + 1)^2$$

$$n^2 - 7n + 19 > 0$$

$$\left(n - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + 19 > 0$$

$$\therefore \left(n - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} > 0$$

となりますが、これは任意の $n$ に対して成立します。よって、 $n$ のとりうる値の範囲は

$$3 \leq n \leq 6 \cdots \cdots (\text{答})$$

となります。後は $\textcircled{2}$ で得られた式に  $n = 3, 4, 5, 6$  を代入するだけですので、解説を割愛させて頂きます。

以上の説明がよく分からないのであれば、おそらく理解できていないのはガウス記号の性

質や整数の取り扱いではなく、連立不等式の問題の練習不足であるように思えてなりません。その場合は、数 I の該当部分を復習することをおすすめ致します。