Q.（標準問題精講 2B P190 例題(2)）
解説で、$\theta+\frac{\alpha}{2}=90^\circ$ が存在することを示すまでの過程がよくわかりません。

A.
問題集の解説の通り、

$$\mathrm{QR}=\frac{4}{\sqrt{3}}\alpha\sin\left(\frac{\alpha}{2}+30^\circ\right)\sin\left(\theta+\frac{\alpha}{2}\right)\ \cdots\cdots ①$$

であり、△ PQR の面積が最大となるのは、QR の長さが最大となるときです。

また、問題集の解説の通り、$\sin\left(\frac{\alpha}{2}+30^\circ\right)$ は正の定数です。変化する値はθだけですので、

①が最大となるのは、 $\sin\left(\theta+\frac{\alpha}{2}\right)$ が最大になる時であることが分かります。

ここで、三角関数の性質より $-1\leqq\sin\left(\theta+\frac{\alpha}{2}\right)\leqq 1$ ですので、 $\sin\left(\theta+\frac{\alpha}{2}\right)=1$ すなわち、$\theta+\frac{\alpha}{2}=90^\circ$ の面積が最大になることが予想されます。しかし、θにはとりうる値の範囲が存在し、θの定義域内に$\theta+\frac{\alpha}{2}=90^\circ$ をみたすようなθが存在することを保証しておく必要があります。(例えば、$\theta=180^\circ$ のような値を設定すると、明らかに正三角形 PQR は作れないことが想像できると思います。$\theta+\frac{\alpha}{2}=90^\circ$ の のときに三角形が作れることを保証する必要があります。）
まず、△ ABR に注目すると、明らかに∠BAR(= θ)は 0 より大きくないといけないので、$\theta>0^\circ$ となります。しかし、θが大きくなりすぎると、∠ABR(= $120^\circ-\theta$) が 0 より小さくなってしまいますので、$120^\circ-\theta>0^\circ$ となります。以上から、$0^\circ<\theta<120^\circ$ となります。
同様に、△ ACQ に注目すると、$\angle\mathrm{CAQ}=180^\circ-\theta-\alpha$, $\angle\mathrm{ACQ}=\theta+\alpha-60^\circ$ より、
$180^\circ-\theta-\alpha>0^\circ$, $\theta+\alpha-60^\circ>0^\circ$ が成立します。
これらの不等式を使い、$\theta+\frac{\alpha}{2}=90^\circ$ をみたすθが存在することを示す流れとなりますが、
以下の計算は問題集の解説にあるとおりですので、説明は割愛致します。