

▼苦手分野対策プリントの2つの目的

1) 出題されうる全てのパターンを網羅し、全体観をつかむ（安心する）

受験とは、言い換えると「出題されうるパターンをできるだけ多く習得した人が合格する試験」です。そこで、このプリントではまず、出題されうるパターンをすべて整理し、全体観を掴みます。これだけ頭に入れたらいいんだ、という安心にもつながるでしょう。

2) その手の問題が出題された時に使う、一般的な考え方を習得する（本質をつかむ）

本質がつかめなければ苦手分野から脱却することはできません。本質とは、類題やちょっとひねった問題が出題されても対応できるようになる、その手の問題が出題された時に持っておくべき一般的な考え方のこと。そこで、洗い出した全出題パターンに対し、「この手の問題は、一般に、こう考える」を明記しました。これをきちんと理解することが重要です。

それでは、本題に入りましょう。

1) 出題パターン (2つ)

格子点の問題は、大きく分けると2つに限られます。

他の問題が出題されているようにも思いますが、すべてはa,bの解法に含まれます。

a. 第○項の数を求めよ 【対応：基礎問題精講130, 131, 標準問題精講136】

b. 初項から第○項の和を求めよ 【対応：基礎問題精講130, 131, 標準問題精講136】

2) 出題パターン別の一般的な考え方

a. 第○項の数を求めよ

<この手の問題を解く時の一般的な考え方>

- ・普通の数列の問題と同じく、「第○項がどんな数になるのか？」を求めることが大目的！
- ・群数列で大事なものは「①どの群に所属するか？」「②その群の何番目か？」である。

<詳細>

普通の数列も、群数列も、あらゆる数列で知りたいのは、「第○項がどんな数なのか？」ということ。この方法論さえ身につけていれば、「第1,058,674項の数が知りたい」と言われても、すぐに答えることができるわけです。

しかし、普通の数列が「一般項を求める」→「一般項に値を代入して第○項を求める」という順で求めたら良いのに対し、群数列は一般項を求めることはできません。

そこで、群数列では、次の2つを突き止めることで、第○項を求めていくのです。

- ①どの群に所属するか？
- ②その群の何番目か？

具体的に見ていきましょう。実は、標準問題精講136(1)に全てが詰まっていると言っても過言ではありません。この問題の解説を詳しく見ていきます。

136 群数列(1)

数列 $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ について、次の問いに答えよ。

- (1) この数列の第29項を求めよ。

< 解答 >

- (1) 分母が n の分数 $\frac{1}{n}, \frac{3}{n}, \frac{5}{n}, \dots, \frac{2n-1}{n}$ をまとめて第 n 群とよぶことにする。
第 n 群には n 個の項があるから、第 n 群の末項は、もとの数列の第

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

項である。第29項が第 n 群にあるとすると、 n は

$$\frac{(n-1)n}{2} < 29 \leq \frac{n(n+1)}{2}$$

をみたす。

$$\frac{(8-1)8}{2} = 28, \quad \frac{8(8+1)}{2} = 36$$

であるから、第29項は第8群の初項である。

よって、第29項は $\frac{1}{8}$

忘れがちなのでもう一度言いますが、標準問題精講136(1)では「第29項を求めよ」と出題されているので、

「①第29項は、どの群に所属するか？」

「②第29項は、その群の何番目か？」

を知らなければいけません。そのために解答では何を行っているかというと、

136 群数列(1)

数列 $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ について、次の問いに答えよ。

(1) この数列の第29項を求めよ。

< 解答 >

(1) 分母が n の分数 $\frac{1}{n}, \frac{3}{n}, \frac{5}{n}, \dots, \frac{2n-1}{n}$ をまとめて第 n 群とよぶことにする。
第 n 群には n 個の項があるから、第 n 群の末項は、もとの数列の第

A $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

項である。第29項が第 n 群にあるとすると、 n は

$$\frac{(n-1)n}{2} < 29 \leq \frac{n(n+1)}{2}$$

をみたす。

$$\frac{(8-1)8}{2} = 28, \quad \frac{8(8+1)}{2} = 36$$

であるから、第29項は第8群の初項である。

よって、第29項は $\frac{1}{8}$

D

A. 第 n 群に、いくつの項数があるかを突き止めている。

つまり、第1群には1コ、第2群には2コ、第3群には3コ、・・・の項があることを突き止めた、ということです。

B. 第1群～第 n 群までに、いくつの項数があるかを突き止めている。

第1群には1コ、第2群には2コ、第3群には3コ、・・・の項が含まれているということは、例えば、第5項の数字は、第3群に含まれているということを意味しているわけです。では、第29項はどこに・・・？

同じように、各群に含まれる項数を足し合わせていけばいいですね。

例えば、第7群までに含まれているのは、第1群には1コ、第2群には2コ、・・・、第7群には6コの項数が含まれるので、 $1+2+\dots+7=28$ から、第28項までが第7群に含まれる、ということがわかるわけです。

ということは、第29項は、第8群に含まれるということがわかるのです。

おそらく、ここの部分が一番難しさを感じているのではないのでしょうか？

しかし、ここを乗り越えれば、群数列の8割はクリアしています。

C. 第n群の何番目かを求める

第29項が第8群に含まれることはわかりました。では、第8群の何番目にあるのでしょうか？ 今回は、たまたま初項だったようですね。

D. 第n群のその番目の数を求める

今回は、第8群の1番目の数を求めたら良いのですね。分母には第n群のnが、分子には1から始まる奇数が順に来るので、1/8が答えになります。

以上のように、A~Dの手順を踏むことで、この手の問題は確実に解くことができます。全く同じ考え方で、標準問題精講136(2)も解くことができますよ。

136 群数列(1)

数列 $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ について、次の問いに答えよ。

(2) この数列の第800項を求めよ。

< 解 答 >

(2) $\frac{(n-1)n}{2} < 800 \leq \frac{n(n+1)}{2}$

B をみ直す n は

$$\frac{(40-1)40}{2} = 780, \quad \frac{40(40+1)}{2} = 820$$

であるから、第800項は第40群の $800 - 780 = 20$ 番目の項である。

C よって、第800項は $\frac{2 \times 20 - 1}{40} = \frac{39}{40}$

D

A. 第n群に、いくつの項数があるかを突き止める

すでに(1)でnであることがわかっているので解説では省略されています。

B. 第1群~第n群までに、いくつの項数があるかを突き止めている。

こちらも、すでに(1)で求められています。そこから、解答のように、第800項がどの群に含まれるのかを求めています。もう一度言いますが、ここで詰まってしまう人がいるので、しっかり理解できていることを確認してください。

C. 第n群の何番目かを求める

第800項が第40群に含まれることはわかりました。では、第40群の何番目にあるのでしょうか？ それは、第39群までに第780項が含まれていることがわかっているので、第800項は第40群の20番目であることがわかります。

D. 第n群のその番目の数を求める

第n群のx番目の項は、分母がn、分子が $2x-1$ です。今回の第800項は、第40群の20番目の数ですので、分母が40、分子が $2 \times 20 - 1 = 39$ になるのです。

・・・どうでしょう？ 以上の考え方が身につけば、例えば次の問題も解けるようになるはずです。まず最初は、基礎問題精講131(2)です。

131 群数列 (II)

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, … のように、数字 n が n 個ずつ並んでいる数列を考える。

(2) 100 項目はどんな数字か。

とにかく、群数列では、

- ① どの群に所属するか？
- ② その群の何番目か？

を考えます。そして、この問題を解く際には、

- A. 第 n 群に、いくつの項数があるかを突き止める
- B. 第 1 群～第 n 群までに、いくつの項数があるかを突き止めている。
- C. 第 n 群の何番目かを求める
- D. 第 n 群のその番目の数を求める

の手順で求めていくのでした。この手順に当てはめて解いていることを、解答を読んで確認してみてください。

解 答

(2) 100 項目が第 n 群にあるとする。

第 $(n-1)$ 群の最後の数は、はじめから数えると

$$1+2+\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1) \text{ (項目) だから,}$$

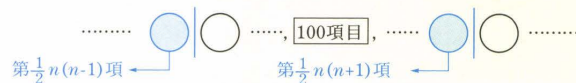
$$\frac{1}{2}n(n-1) < 100 \leq \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\therefore n(n-1) < 200 \leq n(n+1)$$

第 $(n-1)$ 群

第 n 群

第 $(n+1)$ 群



ここで、 $n=14$ のとき

$$\begin{cases} n(n-1)=14 \cdot 13=182 \\ n(n+1)=15 \cdot 14=210 \end{cases} \text{ だから, } n=14$$

よって、第 100 項は 14

基礎問題精講130(1)も同じ考えで解くことができます。

130 群数列 (I)

1から順に並べた自然数を,
 $1|2, 3|4, 5, 6, 7|8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15|16, \dots$
のように、第 n 群($n=1, 2, \dots$)が 2^{n-1} 個の数を含むように分ける。
(1) 第 n 群の最初の数を n で表せ。

とにかく、群数列では、

- ①どの群に所属するか?
- ②その群の何番目か?

を考え、解く際には、

- A. 第 n 群に、いくつの項数があるかを突き止める
- B. 第1群～第 n 群までに、いくつの項数があるかを突き止めている。
- C. 第 n 群の何番目かを求める
- D. 第 n 群のその番目の数を求める

の手順で求めていくのでした。今回は、「C. 第 n 群の」、「D. 1番目の数を求める」ということははっきりしているので、あとは、第 n 群の手前(=第 $n-1$ 群)までの項数を求めたらよいですね。

よって、解答のようになるわけです。

解 答

(1) 第 $(n-1)$ 群の最後の数は、はじめから数えて \leftarrow 各群の最後の数が基準
 $(1+2+\dots+2^{n-2})$ 項目。
すなわち、 $(2^{n-1}-1)$ 項目だからその数字は \leftarrow 等比数列の和の公式を用いて計算する
 $2^{n-1}-1$
よって、第 n 群の最初の数は
 $(2^{n-1}-1)+1=2^{n-1}$

どうですか？ 感覚がつかめてきましたか？

ここで、少しだけ、これまでと一見違って見える問題についてやってみましょう。
基礎問題精講130(3)です。

130 群数列 (I)

1 から順に並べた自然数を,
1|2, 3|4, 5, 6, 7|8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15|16, …
のように, 第 n 群 ($n=1, 2, \dots$) が 2^{n-1} 個の数を含むように分け
る.
(3) 3000 は第何群の何番目にあるか.

この問題もこれまでと考え方は全く変わりません。群数列の問題が出たら、常に頭の中には、

- ①どの群に所属するか?
- ②その群の何番目か?

を考えるのです。今回は、3000という数字になることはわかっているが、それが第何群の何番目にあるのかを求めさせる問題です。これまで勉強してきたので勘がつかめてきているんじゃないかと思うのですが、要は、第 n 群の1番目の項と、第 n 群の最後の項を求めなさいという問題なわけです。

第 n 群の1番目の項は、

- A. 第 n 群に、いくつの項数があるかを突き止める
- B. 第1群～第 n 群までに、いくつの項数があるかを突き止めている。
- C. 第 n 群の何番目かを求める
- D. 第 n 群のその番目の数を求める

で求められるわけですね。最後の項も同様にして求められます。その結果、解答のように、第何群の何番目にあるかがわかるわけです。

解 答

(3) 3000 は第 n 群に含まれているとすると
(1)より, $2^{n-1} \leq 3000 < 2^n$

第 $(n-1)$ 群 第 n 群 第 $(n+1)$ 群

..... () | () 3000, () | ()

$2^{n-1}-1$ 2^{n-1} 2^n

ここで, $2^{11}=2048, 2^{12}=4096$ だから
 $2^{11} < 3000 < 2^{12} \quad \therefore n=12$

よって, 第 12 群に含まれている.
このとき, 第 11 群の最後の数は, $2^{11}-1=2047$ だから,
 $3000-2047=953$ より, 3000 は第 12 群の 953 番目にある.

この手の問題の類題も紹介します。

<類題紹介> (手を動かす必要はありません。同じ考え方で解けることを確認しましょう)

基本例題 110 p.494 基本事項5 重要112

奇数の数列を $1|3, 5|7, 9, 11|13, 15, 17, 19|21, \dots$ のように、第 n 群が n 個の数を含むように分けるとき

(1) 第 n 群の最初の奇数を求めよ。
 (3) 301 は第何群の何番目に並ぶ数か。 (類 昭和薬大)

解答

(1) $n \geq 2$ のとき、第 1 群から第 $(n-1)$ 群までにある奇数の個数は

$$1+2+3+\dots+(n-1) = \frac{1}{2}(n-1)n$$

よって、第 n 群の最初の奇数は $\left\{\frac{1}{2}(n-1)n+1\right\}$ 番目の奇数で

$$2\left\{\frac{1}{2}(n-1)n+1\right\}-1 = n^2-n+1$$

(3) 301 が第 n 群に含まれるとすると

$$n^2-n+1 \leq 301 < (n+1)^2-(n+1)+1$$

よって $n(n-1) \leq 300 < (n+1)n \dots \dots \textcircled{1}$
 $n(n-1), (n+1)n$ は単調に増加し、 $17 \cdot 16 = 272, 18 \cdot 17 = 306$ であるから、 $\textcircled{1}$ を満たす自然数 n は $n=17$

301 が第 17 群の m 番目であるとすると

$$(17^2-17+1)+(m-1) \cdot 2 = 301$$

これを解いて $m=15$
 したがって、301 は 第 17 群の 15 番目 に並ぶ数である。

◀第 $(n-1)$ 群を考えるから、 $n \geq 2$ という条件がつく。

◀「+1」を忘れるな!

◀1 から始まる奇数の k 番目の奇数は $2k-1$

◀まず、301 が属する群を求める。右辺は第 $(n+1)$ 群の最初の数。

◀ $f(n)$ が「単調に増加する」とは、 n の値が大きくなると $f(n)$ の値も大きくなるということ。

◀ $a+(m-1)d$

以下の問題も類題です。同じ流れで解けるか確認しましょう。

Check 例題 群数列(1) ***

1 から順に奇数を並べて、下のように 1 個、3 個、5 個、……となるように群に分け、順に第 1 群、第 2 群、……とする。

1 | 3 5 7 | 9 11 13 15 17 | 19 ……

(1) 第 n 群の最初の数と最後の数を求めよ。
 (3) 207 は第何群の何番目の項か。

解

(1) 第 k 群には $(2k-1)$ 個の数が入っているので、第 1 群から第 $(n-1)$ 群 ($n \geq 2$) までに入る数の個数は、

$$1+3+5+\dots+(2(n-1)-1) = \frac{1}{2}(n-1)(1+(2n-3)) = (n-1)^2 \dots \dots \textcircled{1}$$

したがって、 $(n-1)^2+1 = n^2-2n+2$ より、第 n 群の最初の数は、 (n^2-2n+2) 番目の奇数であるから、その数は、

$$2(n^2-2n+2)-1 = 2n^2-4n+3$$

これは $n=1$ のときも成り立つ。
 また、第 n 群の最後の数は、 $\textcircled{1}$ より、 n^2 番目の奇数であるから、その数は、 $2n^2-1$
 よって、第 n 群の最初の数は $2n^2-4n+3$ 、最後の数は $2n^2-1$

(3) 207 が第 n 群の数とすると、

$$2n^2-4n+3 \leq 207 \leq 2n^2-1$$

$$2n^2-4n+3 \leq 207 \text{ より、 } n(n-2) \leq 102 \dots \dots \textcircled{2}$$

$$2n^2-1 \geq 207 \text{ より、 } n^2 \geq 104$$

n は自然数より、 $n \geq 11 \dots \dots \textcircled{3}$
 $\textcircled{2}$ に $n=11, 12$ を代入すると、
 $11 \times 9 = 99, 12 \times 10 = 120$
 であるから、 $\textcircled{2}, \textcircled{3}$ を同時に満たす n の値は、 $n=11$
 また、207 が第 n 群の m 番目の項とすると、
 $207 = (2n^2-4n+3) + (m-1) \cdot 2$
 であり、 $n=11$ を代入すると、
 $207 = (2 \cdot 11^2 - 4 \cdot 11 + 3) + (m-1) \cdot 2$
 これを解いて、 $m=4$
 よって、207 は 第 11 群の 4 番目の項

◀第 1 群…1 個
第 2 群…3 個
第 3 群…5 個
…
第 n 群… $(2n-1)$ 個
◀ $2(n-1)-1 = 2n-3$ より、初項 1、末項 $2n-3$ 、項数 $n-1$ の等差数列の和

◀ n 番目の奇数は、 $2n-1$

◀ $\textcircled{1}$ の $n-1$ の代わりに n とする。

◀207 は第 n 群の最初の数以上、最後の数以下
◀次のように考えてもよい。
 $2n-1=107$ とすると、 $n=54$ より、207 はもとの数列の第 104 項。これが第 n 群に入ると仮定すると、
 $(n-1)^2+1 \leq 104 \leq n^2$ より $n=11$
よって、第 11 群で、 $101 \leq 104 \leq 121$ より 4 番目
◀第 n 群は初項 $2n^2-4n+3$ 、公差 2 の等差数列

b. 初項から第○項の和を求めよ

<この手の問題を解く時の一般的な考え方>

(aのA~Dをやった上で、)

E. 第n群の和を求める 【対応：基礎問題精講130(2), 131(1)】

F. 第○項が含まれる1つ手前の群までの項の和を求めたあと、第○項が含まれる群のうち最初から第○項までを足し合わせる 【対応：基礎問題精講131(3), 標準問題精講136(3)】

<詳細>

「a. 第○項の数を求めよ」というパターンの問題ができるようになっていれば、今回の「b. 初項から第○項の和を求めよ」という問題は難なくできることでしょう（よくセットで出されま

具体的に行っていくのは、

(aのA~Dをやった上で、)

E. 第n群の和を求める

F. 第○項が含まれる1つ手前の群までの項の和を求めたあと、第○項が含まれる群のうち最初から第○項までを足し合わせる

というもの。実際にこの手順で解答が書かれていることを確認しましょう。一番良い題材は標準問題精講136(3)です。(1), (2)が理解できている前提ではありますが、上記のように書かれていることを確認しましょう。

136 群数列(1)

数列 $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ について、次の

問いに答えよ。

(3) この数列の初項から第800項までの和を求めよ。

(同志社大)

< 解答 >

(3) 第n群の総和は

$$\begin{aligned} \text{C } \frac{1}{n} + \frac{3}{n} + \frac{5}{n} + \dots + \frac{2n-1}{n} &= \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \frac{n\{1+(2n-1)\}}{2} = \frac{n^2}{n} = n \end{aligned}$$

よって、初項から第800項までの和は

D (第1群から第39群までの総和)

+ (第40群の初項から第20項までの総和)

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{39} n + \sum_{k=1}^{20} \frac{2k-1}{40} = \frac{39 \cdot 40}{2} + \frac{1}{40} \cdot \frac{20(1+39)}{2} \\ &= 780 + 10 = 790 \end{aligned} \quad \leftarrow \sum_{k=1}^{20} (2k-1) = \frac{(\text{項数}) \times \{(\text{初項}) + (\text{末項})\}}{2}$$

基礎問題精講131(3)も、同様に求めていることを確認しましょう。

131 群数列(Ⅱ)

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, …のように、数字 n が n 個ずつ並んでいる数列を考える。

(3) 初項から第 100 項までの和を求めよ。

解 答

(3) (2)より、第 13 群の最後の数は

$$\frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 13 = 91 \text{ (項目) だから}$$

第 100 項は第 14 群の 9 番目の数。

(1)より、求める和は

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{13} k^2 + 14 \cdot 9 \\ \text{C} &= \frac{1}{6} \cdot 13 \cdot 14 \cdot 27 + 14 \cdot 9 \\ &= 7 \cdot 9 \cdot (13+2) \\ &= 945 \end{aligned}$$

117

共通因数でくくる

<類題紹介> (手を動かす必要はありません)

これまで紹介してきた考え方、手順で解けることを確認してください。

基本例題 111

基本 110



$\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}, \frac{7}{4}, \frac{8}{4}, \frac{9}{4}, \frac{10}{4}, \frac{11}{5}, \dots$ の分数の数列について、

初項から第 210 項までの和を求めよ。

[類 東北学院大]

指針▷ 分母が変わるところで区切りを入れて、群数列として考える。…… [1]

分母: 1 | 2, 2 | 3, 3 | 4, 4, 4 | 5, ……

1個 2個 3個 4個

第 n 群には、分母が n の分数が n 個あることがわかる。

分子: 1 | 2, 3 | 4, 5, 6 | 7, 8, 9, 10 | 11, ……

分子は、初項 1, 公差 1 の等差数列である。すなわち、もとの数列の項数と分子は等しい。

まず、第 210 項は何群の何番目の数であるかを調べる。

解 答

分母が等しいものを群として、次のように区切って考える。

$$\boxed{1} \quad \frac{1}{1} \mid \frac{2}{2}, \frac{3}{2} \mid \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3} \mid \frac{7}{4}, \frac{8}{4}, \frac{9}{4}, \frac{10}{4} \mid \frac{11}{5}, \dots$$

第 1 群から第 n 群までの項数は

$$1+2+3+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

第 210 項が第 n 群に含まれるとすると

$$\frac{1}{2}(n-1)n < 210 \leq \frac{1}{2}n(n+1)$$

よって $(n-1)n < 420 \leq n(n+1)$ …… ①

$(n-1)n, n(n+1)$ は単調に増加し、 $19 \cdot 20 = 380, 20 \cdot 21 = 420$

であるから、①を満たす自然数 n は $n=20$

また、第 210 項は分母が 20 である分数のうちで最後の数である。ここで、第 n 群に含まれるすべての数の和は

$$\frac{1}{2}n \left[2 \cdot \left\{ \frac{1}{2}n(n-1) + 1 \right\} + (n-1) \cdot 1 \right] \div n = \frac{n^2+1}{2}$$

ゆえに、求める和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{20} \frac{k^2+1}{2} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{20} k^2 + \sum_{k=1}^{20} 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} + 20 \right) \\ &= 1445 \end{aligned}$$

◀もとの数列の第 k 項は分子が k である。また、第 k 群は分母が k で、 k 個の数を含む。

◀これから、第 n 群の最後の数の分子は $\frac{1}{2}n(n+1)$

$$\leftarrow \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 21 = 210$$

◀ は第 n 群の数の分子の和 → 等差数列の和

$$\frac{1}{2}n(2a+(n-1)d)$$

Check
例題

群数列(2)

2の累乗を分母とする既約分数を次のように並べた数列について、

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{5}{16}, \dots, \frac{15}{16}, \frac{1}{32}, \dots$$

- (1) 分母が 2^n となっている項の和を求めよ。
 (2) 初項から第1000項までの和を求めよ。 (岩手大)

考え方▶

数列の数列は、分母を念頭に、同じ分母の項は同じ群としてまとめる

(分母) $2, 4, 4, 8, 8, 8, 8, 8, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 16, \dots$

となっている。つまり、分母が同じ数である項をひとつの群と考え、第 n 群には、分母が 2^n の分数が 2^{n-1} 個あることがわかる。さらに、分子に着目すると、(分子) $1 | 1, 3 | 1, 3, 5, 7 | 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 | \dots$ となっている。

解▶

- (1) 分母が 2^n である分数をまとめて第 n 群とする数列を考えると、

$$\frac{1}{2} \mid \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \mid \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8} \mid \frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{5}{16}, \dots, \frac{15}{16} \mid \frac{1}{32}, \dots$$

となり、分母が 2^n の分数は 2^{n-1} 個あり、分子は初項1、公差2の等差数列になっているから、その和は、

$$\frac{1+3+5+\dots+(2 \cdot 2^{n-1}-1)}{2^n} = \frac{2^{2n-2}}{2^n} = 2^{n-2}$$

- (2) 各群の項数は1, 2, 4, 8, 16, ...より、

$$\text{第 } n \text{ 群までの項数の和は、} \frac{1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

$2^9 - 1 = 511$, $2^{10} - 1 = 1023$ より、第1000項は第10群の第489項なので、求める和は第9群までの和と第10群の第489項までの和となる。

$$\begin{aligned} \text{よって、} & \sum_{k=1}^9 2^{k-2} + \left(\frac{1}{2^{10}} + \frac{3}{2^{10}} + \dots + \frac{977}{2^{10}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2^9 - 1)}{2 - 1} + \frac{1}{2^{10}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 489 \cdot (1 + 977) \\ &= \frac{511}{2} + \frac{489^2}{1024} = \frac{500753}{1024} \end{aligned}$$

等差数列の和
 $S_n = \frac{n(a+d)}{2}$ を利用
 分子 $1+3+5+\dots$
 $= \frac{2^n \cdot (1+2 \cdot 2^{n-1}-1)}{2}$
 $= 2^{2n-2}$

第1000項が第何群に入っているかをまず調べる。

$\sum_{k=1}^9 2^{k-2}$ は初項 $\frac{1}{2}$ 、公比2の等比数列の初項から第9項までの和
 $1+3+\dots+977$ は、初項1、末項977、項数489の等差数列の和

FOCUS

分数の群数列は分母、分子に着目して見抜く

いかがでしたでしょうか？ 最後にまとめを掲載しました。

▼まとめ

・ 出題パターンと、一般的な考え方

a. 第○項の数を求めよ 【対応：基礎問題精講130, 131, 標準問題精講136】

- ①どの群に所属するか？
- ②その群の何番目か？ を求める！

<具体的な手順>

- A. 第n群に含まれる項の数を求める
- B. 初項から第n-1群までの項数の和を求める
- C. 第n群の何番目かを求める
- D. 第n群のその番目の数を求める

b. 初項から第○項の和を求めよ 【対応：基礎問題精講130, 131, 標準問題精講136】

<具体的な手順>

(A~Dをやった上で、)

- E. 第n群の和を求める
- F. 第○項が含まれる1つ手前の群までの項の和を求めたあと、第○項が含まれる群のうち最初から第○項までを足し合わせる