

Q. (標準問題精講 3 例題 21(3))

解答の下から 3 行目から 2 行目に変形するとき、 \lim が分かれているのはなぜでしょうか。

A.

$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^x$ をどのように計算しますか？おそらく、次のように考えるのではないのでしょうか。 x を 0 に近づけると x^2 も 0 に近づき、 e^x は 1 に近づく。よって、 $x^2 e^x$ は $0 \times 1 = 0$ に近づく。このことを数式で書くと次のようになります。

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^x = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 0 \cdot 1 = 0$$

このように、極限值が存在するときは、 \lim を分けて積の計算を行うことが可能です。

また、 $k = f(x+h) - f(x)$ と k が定義されているので h を 0 に近づけると k も 0 に近づく事になります。これらのことを鑑みると、3 行目から 2 行目の変形はほぼ自明なのではないかと思います。

また、このように \lim を分ける理由は、合成関数の微分の公式の結論にあたる $\frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$ の積の形を無理やり作り出そうとするからに他なりません。